Exercise 7.1

The heat flux can be easily calculated with the given heating power (3 kW), efficiency (60%), and bottom surface area (30 cm diameter) of the pan,

$$q = 3 \times 10^3 \ \times \ 60\% \ \div \left(\frac{\pi \times 0.3^2}{4}\right) = 25478 \, W \cdot m^{-2}$$

As the pressure is 1 atm, the boiling point water $T_{sat} = 100°\mathrm{C}$. Then, the inner surface temperature can be estimated by the figure in Slide 6 or calculated using Equation 7.1 knowing that $\Delta T_{excess} = T_s - T_{sat}$.

In the figure in Slide 6, with a boiling heat flux $q = \sim 2.5 \times 10^4 \, W/m^2$, $\Delta T_{excess} = 7°\mathrm{C}$ can be roughly estimated. Thus, the inner surface temperature of the pan $T_s = 107°\mathrm{C}$.

Alternatively, with equation 7.1, at $100°\mathrm{C}$, the surface tension of liquid-vapor interface $\sigma = 0.0589 N/m$, and for mechanically polished stainless steel, $C_{sf} = 0.0130$ and $n = 1.0$. Together with all give physical properties of water, we have

$$25477 = 0.282 \times 10^{-3} \times 2257 \times 10^3 \times \left[\frac{9.81 \times (957.9 - 0.6)}{0.0589}\right]^{1/2} \times \left(\frac{4217 \times \Delta T_{excess}}{0.013 \times 2257 \times 10^3 \times 1.75}\right)$$

$$\Delta T_{excess} = 5.7°\mathrm{C}$$

Thus, the inner surface temperature of the pan $T_s = 105.7°\mathrm{C}$.

To estimate the temperature difference between the inner and outer surface of the pan, we consider 1-D Fourier's law,

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

With constant k, simple integration gives

$$q(x_2 - x_1) = -k \Delta T$$

Where $x_2 - x_1 = 6 \, mm$ (thickness of the pan). Thus,

$$\Delta T = \frac{25478 \times 6 \times 10^{-3}}{16.2} = 9.4°\mathrm{C}$$

For effective h between the pan and the water, we know that

$$q = h(T_s - T_{sat})$$

Thus,

$$h = \frac{25478}{5.7} = 4470\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$$

Exercise 7.2

Given that

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 0.04 + \frac{0.002}{2} = 0.041m$$

$$\frac{L_c + r_1}{r_1} = \frac{0.041 + 0.04}{0.04} = 2.025$$

$$L_c(\frac{h}{kt})^{1/2} = 0.041 \times \sqrt{\frac{30}{200 \times 0.002}} = 0.355$$

In the graph, we can find that $\eta_f = 0.88$

The surface area of the fin is

$$A = 2[\pi(L + r_1)^2 - \pi r_1^2] + 2\pi(L + r_1)t = 0.03115m^2$$

Thus, the heat loss is

$$Q_{loss} = hA(T_s - T_\infty)\eta_f = 30 \times 0.03115 \times (523.2 - 343.2) \times 0.88 = 148W$$

Exercice 7.3

a) Le nombre de Biot vaut :

$$Bi = \frac{hL}{k} = \frac{15 * 0.2}{0.935} = 3.21 > 0.1$$

Dans ce cas, il faut considérer le profil de température interne au système.

Remarque 1 : dans le modèle décrit dans le cours, le flux de chaleur est nul au centre du système. Par conséquent les mêmes équations régissent le cas présenté ici, où un côté de la plaque est isolé, à condition de choisir le « centre » de la plaque au niveau du côté isolé dans le paramétrage du système.

On utilise les relations données pour une plaque mince :

$$\theta\ (0,t) = \frac{T\ (0,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{50 - 100}{20 - 100} = 0.625$$

On a alors :

$$Bi = 3.21 \ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1.2 \\ A = 1.21 \end{cases}$$

Et alors

$$\theta\ (0,t) = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Donc

$$\tau = -\frac{1}{\lambda_1^2} \ln\left(\frac{\theta}{A_1}\right)$$

$$\tau = -\frac{1}{1.2^2} \ln\left(\frac{0.625}{1.21}\right) = 0.46$$

Remarque 2: on peut retrouver cette valeur graphiquement sur la courbe donnée dans le cours

Remarque 3 : $\tau > 0.2$ donc n'utiliser que le premier terme de la série du développement de θ est une bonne approximation.

Alors

$$t = \frac{\tau L^2}{\alpha}$$

Calcul de :

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{0.935}{2300 * 840} = 4.84 * 10^{-7}\ m^2.s^{-1}$$

Donc

$$t = \frac{0.46 * 0.2^2}{4.84 * 10^{-7}} = 38017\ s = \boldsymbol{10h\ 34\ min}$$

b) Le transfert de chaleur à la paroi en contact avec l'air vaut :

$$q\ (x = L, \tau) = -k \left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=L}$$

D'autre part :

$$T(x,\tau) - T_\infty = (T_i - T_\infty) A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos\left(\frac{\lambda_1 x}{L}\right)$$

Donc :

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x} = -\frac{\lambda_1}{L}(T_i - T_\infty)\ A_1 \sin\left(\frac{\lambda_1 x}{L}\right) e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

D'où

$$\left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=L} = -\frac{\lambda_1}{L}(T_i - T_\infty)\ A_1 \sin(\lambda_1)\ e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Soit :

$$q\ (x = L, \tau) = \frac{k\lambda_1}{L}(T_i - T_\infty)\ A_1 \sin(\lambda_1)\ e^{-\lambda_1^2 \tau}$$

Pour obtenir la chaleur totale transmise au mur pendant le réchauffement, on intègre le flux instantané trouvé précédemment sur la durée du réchauffement :

$$q_{tot} = \int_{\tau=0}^{0.46} \frac{k\lambda_1}{L}(T_i - T_\infty)\ A_1 \sin(\lambda_1)\ e^{-\lambda_1^2 \tau} d\tau$$

$$\boxed{q_{tot} = \frac{k}{L\lambda_1}(T_\infty - T_i)A_1 \sin(\lambda_1)\,[e^{-0.46} - 1]}$$

Application numérique :

$$q_{tot} = \frac{0.935}{0.2 * 1.2} * (100 - 20) * 1.21 * \sin(1.2)\left[e^{-0.46*1.2^2} - 1\right]$$

$$\underline{\boldsymbol{q_{tot} = -31\, J.m^{-2}}}$$

<u>Remarque :</u> Le flux de chaleur est négatif, car le transfert de chaleur se fait dans la direction opposée à celle de l'axe des x

Exercice 7.4

a) Le nombre de Biot s'exprime :

$$Bi = \frac{hL_c}{k}$$

On peut choisir comme longueur caractéristique le rapport du volume de l'objet sur sa surface :

$$L_c = \frac{8a^3}{28a^2} = 0.28a$$

Alors :

$$Bi = 67.5 * 0.28 * \frac{0.2}{220} = 0.017 < 0.1$$

On est donc dans une situation où la résistance interne du matériau peut être négligée. On peut donc directement utiliser la relation :

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\frac{hA}{V\rho c_p}\, t\right)$$

Par conséquent :

$$t = \frac{V\rho c_p}{hA} \ln\left(\frac{T_i - T_\infty}{T(t) - T_\infty}\right)$$

$$t = \frac{8a^3\rho c_p}{h28a^2} \ln\left(\frac{T_i - T_\infty}{T(t) - T_\infty}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = \frac{8a\rho c_p}{28h} \ln\left(\frac{T_i - T_\infty}{T(t) - T_\infty}\right)}}$$

Application numérique :

$$t = \frac{8 * 0.2 * 2700 * 870}{28 * 67.5} \ln\left(\frac{20 - 950}{500 - 950}\right) = 1444\ s$$

$$\underline{\boldsymbol{t = 24\ min}}$$

b) On peut négliger la résistance interne lorsque Bi < 0.1 :

$$\frac{0.28\ ha}{k} < 0.1 \Leftrightarrow a < 0.1 * \frac{220}{0.28 * 67.5} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{a < 1.14\ m}$$

Il faut donc que l’épaisseur du parallélépipède soit inférieure à 1.14 m.

Ex. 7.5

From ex. 2t 1.2, we obtained an expression for q_r, i.e.

$$q_r = S_{n_0}\left(\frac{r}{3} + \frac{b}{5}\frac{r^3}{R^2}\right) \text{ —— } (1)$$

We no longer know the T @ the surface so we have to take advantage of constant h.

We

$$q_r = S_{n_0}\left(\frac{r}{3} + \frac{b}{5}\frac{r^3}{R^2}\right) = h\,(T_s - T_\infty) \text{ —— } (2)$$

↳ we can obtain an expression for T_s from (1)

$$-k\frac{dT}{dr} = S_{n_0}\left(\frac{r}{3} + \frac{b}{5}\frac{r^3}{R^2}\right)$$

integrate, rearrange

$$T(r) = \frac{-S_{n_0}}{k}\left(\frac{r^2}{6} + \frac{b}{20}\frac{r^4}{R^2}\right) + C_2 \text{ —— } (3)$$

plug $T(r)$ into (2) @ $r=R$

$$S_{n_0}\left(\frac{R}{3} + \frac{b}{5}\frac{R^3}{R^2}\right) = h\left[\frac{-S_{n_0}}{k}\left(\frac{R^2}{6} + \frac{b}{20}\frac{R^4}{R^2}\right) + C_2 - T_\infty\right]$$

solve for C_2

$$C_2 = \frac{S_{n_0}}{h}\left(\frac{R}{3} + \frac{bR}{5}\right) + \frac{S_{n_0}}{k}\left(\frac{R^2}{6} + \frac{bR^2}{20}\right) + T_\infty$$

subbing into (3)

$$\boxed{T(r) = \frac{-S_{n_0}}{k}\left(\frac{r^2}{6} + \frac{b}{20}\frac{r^4}{R^2} - \frac{R^2}{6} - \frac{bR^2}{20}\right) + \frac{S_{n_0}}{h}\left(\frac{R}{3} + \frac{bR}{5}\right) + T_\infty}$$

Exercice 7.6

Il faut calculer la chaleur rayonnée du sol vers les autres parois (petits murs, grands murs, et plafond). Comme toute chaleur émise du sol est forcément reçue par une des autres parois, et que toute les parois sont à la même température, on a directement $F_{sol,parois} = 1$ et :

$$Q_{rad,sol} = A_{sol}F_{sol,parois}\sigma e\left(T_{sol}^4 - T_{pm}^4\right) = \mathbf{75.18\ kW}$$

Remarque : si on voulait calculer la quantité de chaleur reçue par chacune des parois, on aurait les résultats suivants.

- Petits murs :

Le facteur de vue entre le sol et un petit mur s'obtient graphiquement (cf cours) pour :

$$\frac{Z}{X} = 0.47\ et \frac{Y}{X} = 2$$

On obtient alors :

$$F_{sol,pm} \approx 0.08$$

Alors :

$$Q_{rad,sol,pm} = 2 * A_{sol}F_{sol,pm}\sigma e\left(T_{sol}^4 - T_{pm}^4\right) = \mathbf{12.03\ kW}$$

- Grands murs :

Le facteur de vue entre le sol et un grand mur s'obtient graphiquement (cf cours) pour :

$$\frac{Z}{X} = 0.23\ et \frac{Y}{X} = 0.5$$

On obtient alors :

$$F_{sol,gm} \approx 0.15$$

Alors :

$$Q_{rad,sol,gm} = 2 * A_{sol}F_{sol,gm}\sigma e\left(T_{sol}^4 - T_{gm}^4\right) = \mathbf{22.56\ kW}$$

- <u>Plafond :</u>

Le facteur de vue entre le sol et le plafond s'obtient graphiquement (cf cours) pour :

$$\frac{X}{D} = 4.28\ et\ \frac{Y}{D} = 2.14$$

On obtient alors :

$$F_{sol,plafond} \approx 0.5$$

Alors :

$$Q_{rad,sol,gm} = A_{sol}F_{sol,plafond}\sigma e\left(T_{sol}^4 - T_{plafond}^4\right) = \mathbf{37.59\ kW}$$

La somme des facteurs de vue est bien égale à 1, comme on l'a vu pour le premier calcul.

Le flux de chaleur par convection s'obtient en calculant le nombre de Rayleigh (avec les valeurs de paramètres correspondant à de l'eau à 0°C) :

$$Ra_L = \frac{g\beta}{\nu\alpha}(T_{sol} - T_\infty)L^3$$

$$Ra_L = \frac{9.81 * 3.6 * 10^{-3}}{1.3 * 10^{-5} * 2.1 * 10^{-5}} * 35 * 30^3$$

$$\underline{\boldsymbol{Ra_L = 1.22 * 10^{14}}}$$

Cette valeur est au-delà de la gamme donnée dans le cours pour une plaque horizontale, mais en l'absence de meilleur modèle, on supposera qu'il est toujours raisonnable d'utiliser la relation suivante :

$$Nu = 0.15\ Ra_L^{\frac{1}{3}} = \mathbf{7444}$$

Et donc

$$Q_{conv} = \frac{kNu}{L}A(T_{sol} - T_\infty)$$

$$\underline{\boldsymbol{Q_{conv} = 93.79\ kW}}$$

Donc au total il faudrait fournir au total 168.33 kW de puissance thermique au sol pour compenser la perte de chaleur.

Exercice 7.7

On considère ici seulement la chaleur rayonnée du tuyau à haute température vers les tuyaux à basse température, et, contrairement à l'exercice 5.1, la somme des deux facteurs de vue ne sera pas égale à 1, puisqu'une partie de la chaleur irradiée n'atteindra jamais aucun des deux autres tuyaux.

Dans la suite, l'indice 1 se rapporte au tuyau chaud du centre, l'indice 2 au tuyau froid le plus proche du tuyau chaud et l'indice 3 au tuyau froid le plus éloigné.

On considère que tous les tuyaux ont la même émissivité $\epsilon = 0.59$ (acier inox)

Le flux de chaleur irradiée s'écrit :

$$Q_{rad,tot} = Q_{rad,12} + Q_{rad,13}$$

$$Q_{rad,tot} = \pi DL(F_{12} + F_{13})\sigma\epsilon(T_1^4 - T_2^4)$$

Avec

$$F_{ij} = \frac{\sqrt{h^2-4} - h + 2\arcsin\left(\frac{2}{h}\right)}{2\pi}$$

Pour la radiation de 1 vers 2 : $h = \frac{H}{R} = \frac{2}{0.1} = 20$

$$F_{12} = \frac{\sqrt{396} - 20 + 2\arcsin(0.1)}{2\pi} = 0.0159$$

Pour la radiation de 1 vers 3 : $h = \frac{H}{R} = \frac{5}{0.1} = 50$

$$F_{12} = \frac{\sqrt{2496} - 50 + 2\arcsin(0.04)}{2\pi} = 0.0064$$

Donc :

$$Q_{rad,tot} = \pi * 0.2 * 10 * 0.0223 * 5.67 * 10^{-8} * 0.59 * (773^4 - 293^4)$$

$$\boldsymbol{Q_{rad,tot} = 1639\ W}$$